# Logique constructive (non duale) : une exigence de l'ontologie ou de la méthodologie ? (Partie 2)

*Constructive (non-dual) logic: a requirement of ontology or methodology? (Part 2)*

**Dr. Saeb ELAMAMI د. صائب العمامي**
*Enseignant vacataire*
*Institut Préparatoire aux Études Littéraires et de Sciences Humaines de Tunis*
*Université de Tunis*
*saeb.amami@gmail.com*

## Résumé :

La question sur laquelle porte cet article consiste à savoir si la nécessité d'utiliser une logique intuitionniste[1] dans les mathématiques constructives est impliquée par une nature particulière des objets considérés dans ces mathématiques ou que cette logique est simplement la méthode de raisonnement conforme à notre objectif lorsqu'on veut faire des mathématiques algorithmiques[2]. Une manière plus concrète pour réfléchir sur cette question est d'interpréter le problème comme suit : « Les mathématiques constructives sont-elles caractérisées par des objets spécieux étudiés ou par les manières au moyen desquelles on raisonne sur des objets « normaux », c'est-à-dire, finalement, caractérisées par la logique constructive ? ».

**Mots-clés :** logique constructive ; restrictions méthodologiques ; exigences ontologiques ; mathématiques algorithmiques.

## Abstract:

This article addresses the question of whether the need to use intuitionistic[3] logic in constructive mathematics is implied by a particular nature of the objects considered in this mathematics, or

[1] Dans le contexte des fondements des mathématiques, le terme « intuitionnisme » et « constructivisme » font référence à deux philosophies qui, partageant l'idée générale de la centralité des constructions en mathématiques, se distinguent sur le rôle de l'intuition et de la « clarté intuitive » dans cette opération. Dans cet article, j'utilise indifféremment l'expression « logique intuitionniste » et « logique constructive ». En fait, ce que la littérature de la philosophie et de la logique mathématique avait l'habitude de l'appeler « logique constructive » est la logique tirée et formalisée par Heyting et Kolmogorov à partir des mathématiques intuitionnistes de Brouwer. Ces points vont être illustrés plus tard.

[2] Faire des mathématiques de manière algorithmique signifie d'exposer explicitement tout objet ou algorithme dont le mathématicien prétend qu'il existe.

[3] In the context of the foundations of mathematics, the term « intuitionism » and « constructivism » refer to two philosophies which, sharing the general idea of the centrality of constructions in mathematics, differ on the role of intuition and « intuitive clarity » in this operation. In this article, I use the expression « intuitionistic logic » and « constructive logic » interchangeably. In fact, what the literature of philosophy and mathematical logic used to call « constructive logic » is the logic drawn and formalized by Heyting and Kolmogorov from the intuitionist mathematics of Brouwer. These points will be illustrated later.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

whether this logic is simply the method of reasoning that best suits our objective when we want to do algorithmic[4] mathematics. A more concrete way to consider this question is to interpret the problem as follows: « Are constructive mathematics characterized by the specific objects studied or by the ways in which we reason about « normal » objects, that is, ultimately, are they characterized by constructive logic? ».

**Keywords :** constructive logic; methodological restrictions; ontological requirements; algorithmic mathematics.

## Introduction :

S'appuyant sur les clarifications conceptuelles développées dans la première partie de cet article, où furent précisément établis les cadres historiques et conceptuels de notre problématique portant sur la question de savoir si la logique constructive est une exigence de l'ontologie ou de la méthodologie**,** cette seconde partie s'attache à examiner dans quel sens il est véritablement plausible de soutenir que la logique constructive n'est pas la science du raisonnement impliquée par la nature de certains objets spécifiques considérés, mais une méthode de raisonnement adaptée à notre objectif lorsqu'on veut faire, avec des objets « normaux », des mathématiques algorithmiques.

## I) Le traitement prudent du langage et la tendance algorithmique : La maintenance de certaines distinctions significatives et le rejet des preuves par contradiction

Comme je l'ai mentionné précédemment, les mathématiques constructives ont commencé par une observation que le sens de la disjonction P ∨ Q (« P ou Q ») en mathématiques est parfois différent du sens intuitif de « ou ». Ensuite, il y a eu une prise de conscience que les significations intuitives et mathématiques de tous les connecteurs logiques diffèrent parfois. Une analyse approfondie de cette distinction a conduit à réaliser que pour représenter adéquatement notre intuition sur ces connecteurs, nous avons besoin (au moins) de deux opérations différentes pour chaque connecteur : connecteur constructif et connecteur classique. Ainsi, afin de saisir cette signification intuitive, il y a une nécessité de maintenir certaines distinctions significatives. Dans la suite, je vais essayer de clarifier certaines de ces distinctions entre les significations mathématiques et intuitives. Puisqu'elle se trouve à la base de la preuve par l'absurde, je propose de concentrer l'attention sur les distinctions significatives en rapport avec la négation.

D'abord, disons qu'on pourrait être persuadé qu'il est contradictoire que cet objet ou l'autre n'existe pas. Mais cela semble-t-il être différent de dire que cet objet lui-même existe ? Comme on vient de voir, d'un point de vue classique, il n'y a aucune différence entre les deux affirmations.

[4] Doing mathematics algorithmically means explicitly stating any object or algorithm that the mathematician claims exists.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

Le milieu exclu assure cette équivalence. Mais, d'un point de vue constructif, les deux affirmations sont différentes.

La logique constructive, spécialement conçue aux objets constructifs menés dans le cadre des abstractions de la réalisabilité potentielle, n'autorise pas de la « loi du milieu exclu ».

Voyons maintenant certains éclaircissements que le rejet de ce principe aristotélicien peut nous apporter.

Dans la logique constructive, les énoncés ¬⊢(¬p) et ⊢p sont différents ; le premier prétend que **non p ne peut être prouvé**, tandis que le second prétend que **p peut être prouvé**, ce qui est strictement plus fort. Alors, nous pouvons écrire ⊢p pour dire "p", mais¬⊢(¬p) veut dire « pas non p ». De ce point de vue, « pas non p » n'est pas "p". Ainsi, si (x n'existe pas) ne peut pas être prouvé vrai alors cela est différent de ( x existe) est prouvé vrai. La logique constructive considère ces distinctions comme essentielles ; du point de vue constructif, la première proposition est, en général, plus faible que la seconde[5].

Pareillement, ⊣ ¬ (¬p) et ⊢p sont différents ; le premier prétend que **non p peut être réfuté** (prouvé faux), tandis que le second prétend que **p peut être prouvé** vrai, ce qui est strictement plus fort. Alors nous pouvons écrire ⊢p comme l'interprétation de notre signification quand on **affirme "p"** et ⊢¬ (¬p) comme notre signification quand on **affirme « non non p** ». De ce point de vue, « non non p » n'est pas "p". Si « x n'existe pas » peut être réfuté (prouvé faux) alors cela est différent de « x existe » est prouvé vrai. La réduction de l'un des deux disjoints à l'absurdité ne permettrait pas de déduire la vérité de l'autre disjonction. Nous ne pouvons pas parvenir à établir la vérité de P en réfutant le contraire ¬p.

Mêmement, ¬⊢(¬p) et ⊢¬(¬p) sont différents ; le premier prétend que **non p ne peut pas être prouvé,** tandis que le second prétend que **non non p peut être prouvé** (ou que « non p » peut être réfuté, voir prouvé faux). Ce qui est strictement plus fort. Alors nous pouvons écrire ⊢¬(¬p) comme l'interprétation de notre signification quand on affirme **"non (non p)",** et ¬⊢(¬p) comme notre signification quand on affirme « **pas non p ».** De ce point de vue, « pas non p » n'est pas "non (non p)". Si (x n'existe pas) ne peut pas être prouvé vrai alors cela est différent de (x n'existe pas) est réfuté (prouvé faux).

De la même manière, ¬⊢p et ⊢¬p sont différents ; le premier prétend que **p ne peut être prouvé**, tandis que le second prétend que **p peut être réfuté**, ce qui est strictement plus fort. Alors nous pouvons écrire ⊢¬p comme notre interprétation de la signification quand on affirme "non p", mais ¬⊢p comme notre signification quand on affirme «pas p». De ce point de vue, « non p » n'est

[5]« Thus, traditional logic neglects the distinctions between propositions of the for∃xЬ(x) and¬ ¬∃xB(x), while constructive logic considers these distinctions essential ; from the constructive point of view, the second proposition is, generally speaking, weaker than the first ». B. A. Kushner, *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*, Trad. Ru. par Mendelson, Providence, American Mathematical Society. Translations of Mathematical Monographs, 1984, p. 18.
La formule « x ⊢ y » signifie « y est déductible de x », c'est-à-dire que y est prouvable à partir de x.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

pas "pas p". « (x existe) ne peut pas être prouvé vrai » est différent de « (x existe) est réfuté (prouvé faux) ». Ou, encore, « **échoue à être prouvable** » est différent de « **est prouvé faux** ».

Voici un tableau récapitulatif des distinctions précédentes :

| **Symboles** | ¬⊢(¬p) | ⊢p | ⊢¬ (¬p) | ¬⊢(¬p) et | ¬⊢(¬(¬p)) | ¬⊢p | ⊢¬p, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **L'énoncé prétend que** | « non p ne peut pas être prouvé » | « p peut être prouvé » | « non p peut être réfuté » (prouvé faux)<br><br>ou que « non (non p) peut être prouvé » | « non p ne peut être prouvé » | « non (non p) ne peut pas être prouvé » | « p ne peut être prouvé » | « p peut être réfuté » |
| **signification** | On écrit **¬⊢(¬p)** comme notre signification quand on affirme « **pas non p** ». | On écrit ⊢p pour dire "p" | On écrit ⊢¬ (¬p) comme notre signification quand on affirme « **non non p** ». | On écrit **¬⊢(¬p)** comme notre signification quand il affirme « **pas non p** ». | nous pouvons écrire **¬⊢(¬(¬p))** comme l'interprétation de notre signification quand on affirme **pas "non (non p)"** | **¬⊢p** comme notre signification quand on affirme « **pas p** ». | nous pouvons écrire **⊢¬p** comme notre interprétation de la signification quand on affirme **"non p"** |
| **Distinction significative I** | Si « x n'existe pas » ne peut pas être prouvé vrai, alors cela est différent de « x existe » est prouvé vrai. | | Si « x n'existe pas » peut être réfuté (prouvé faux) alors cela est différent de « x existe » est prouvé vrai. | Si « x n'existe pas » ne peut pas être prouvé vrai alors cela est différent de « x n'existe pas) est réfuté (prouvé faux ». | Si l'énoncé disant qu'il est faux que « x n'existe pas » » ne peut pas être prouvé vrai alors cela est différent de « x n'existe pas »est prouvé vrai | Si « x existe » ne peut pas être prouvé vrai alors cela est différent de « x n'existe pas » est réfuté (prouvé faux) | Si « x n'existe pas » ne peut pas être prouvé alors cela est différent de « x existe » est réfuté |
| **Distinction significative II** | De ce point de vue, **pas non p** » n'est pas **"p"**. | | De ce point de vue, « **non non p** » n'est pas **"p".** | De ce point de vue, « **pas non p** » n'est pas **"non (non p)**". | **pas "non (non p)"** n'est pas « **non p** » | « **Pas p** »<br><br>n'est pas « **non p** » | De ce point de vue, « **non p** » n'est pas **"pas p"** |


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

Dans ce dernier moment de cette rubrique, je propose d'éclairer très brièvement ce dernier point dans le but d'apporter une réponse plausible à notre question de départ. Cette dernière, pour rappeler consiste à savoir si la nécessité d'utiliser une logique classique dans les mathématiques constructives est impliquée par une nature particulière des objets considérés dans ces mathématiques ou que cette logique est simplement la méthode de raisonnement conforme à notre l'objectif lorsqu'on veut faire des mathématiques algorithmiques.

## II) La logique constructive : une implication méthodologique et non pas ontologique

La logique classique, contrairement à celle constructive, nous aveugle sur certaines distinctions sémantiques qui devraient être maintenues. Ce fait est à l'origine de la non-tangibilité de nombreux théorèmes des mathématiques classiques. Ce Point est exprimé par Kushner comme suit :

> « Ainsi la logique classique néglige les distinctions entre les propositions de la forme ∃x B (x) et ¬¬∃x B (x), tandis que la logique constructive considère ces distinctions comme essentielles ; du point de vue constructif, la seconde proposition est, en général, plus faible que la première »[6].

En fait, comme Bishop l'a bien remarqué, le calcul de négation est devenu une béquille systématique pour l'inconstructivité[7] et, en conséquence, de la non-calculabilité. Ce qui n'échappe pas à Martin-Lof et Lozinski, Z. A[8]. Pour ces deux mathématiciens d'une persuasion constructiviste, la véritable source des procédures et des objets (des fonctions, des nombres, etc.) incalculables des mathématiques classiques est la loi du milieu exclu et le raisonnement de la preuve indirecte[9]. En fait, l'interprétation large de l'existence a un cout : lorsque nous passons de l'interprétation naturelle initiale et constructive de ∃xP (x) à l'utilisation sans restriction de l'interprétation idéaliste, $\neg\forall x\neg P(x)$, les mathématiques qui en résultent ne peuvent généralement pas être interprétées dans des modèles de calcul tels que la théorie des fonctions récursives. L'interprétation idéaliste de l'existence, par les abstractions des possibilités de construction, les choix arbitraires et les constructions transfinies qu'elles permettent, appauvrit le sens calculatoire des mathématiques.

De l'autre côté, nous avons vu que dans les mathématiques constructives, la compréhension des énoncés devrait être basée sur des principes logiques constructifs spécialement conçus.

---

[6] « Thus, traditional logic neglects the distinctions between propositions of the for∃xЪ(x) and¬ ¬∃xB(x), while constructive logic considers these distinctions essential ; from the constructive point of view, the second proposition is, generally speaking, weaker than the first ». B. A. Kushner, *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*, Trad. Ang. par E. Mendelson, Providence, Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Vol. 60, 1984, p. 18.

La formule « x ⊢ y » signifie « y est déductible de x », c'est-à-dire que y est prouvable à partir de x.

[7] E. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967, p. 6.

[8] Martin-Löf est l'un des élèves de A. N. Kolmogorov.

[9] P. Martin-Löf & Z. A. Lozinski, « Constructive Mathematics and Computer Programming (and Discussion) », in : *Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences,* Vol. 312, Issue 1522, 1984, p. 156.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

Brouwer avait montré cette exigence d'une nouvelle logique adaptée à ces objets. Heyting a accompli la tâche en postulant les principes d'une logique intuitionniste, ou constructive. Bien que Brouwer soit loin d'approuver cette lecture[10], une idée très répandue dans la philosophie des mathématiques consiste à dire que c'est en raison de la considération d'objets constructifs dans le cadre des abstractions de la réalisabilité potentielle que l'usage de la logique constructive est imposé. Ce point est éloquemment exprimé par N.M. Nagorny :

> « En raison de la nature des objets autorisés (point 1 [Les mathématiques constructives devraient traiter exclusivement des objets constructifs]) et des abstractions (point 2 [l'abstraction de la réalisabilité potentielle est admissible, mais l'abstraction de l'infini actuel est complètement exclue]), la compréhension des énoncés mathématiques doit être basée sur des principes logiques constructifs spécialement conçus. Par exemple, l'existence d'un objet avec une propriété donnée devrait signifier la possession d'un chemin permettant une construction potentiellement réalisable d'un objet avec cette propriété. L'appareil de déduction logique utilisé devrait être fondé sur une logique constructive qui exclurait la prouvabilité des théorèmes d'existence pure. Une telle logique devrait être libre, en particulier, de la soi-disant « Loi du milieu exclu » (considérée comme un principe logique général) »[11].

Dans la citation ci-dessus, la nécessité de l'accréditation de la logique constructive est expliquée par le fait qu'elle est, contrairement à la logique classique, adaptée aux objets spécifiques considérés dans les mathématiques classiques.

Sans nier la possibilité de défendre cette thèse, je pense qu'il n'y a pas un argument concluant en sa faveur. De toutes les façons, rien n'est évident dans l'implication entrainant l'usage des principes de la logique constructive à partir de la nature des objets autorisés. Cette hypothèse, qui restreint l'univers du discours mathématique pour pouvoir en tirer la limitation introduite sur les principes logiques est, me semble-t-il, superflue. Pour faire des mathématiques constructives, il n'est pas nécessaire de changer ou restreindre les objets considérés, mais les règles de la logique par lesquelles ces objets sont manipulés. En fait, comme disaient D. S. Bridges et L. S. Vîta, «*travailler avec la logique intuitionniste interdit automatiquement les étapes non*

[10] Comme déjà mentionné, à cause de sa position anti logique, Brouwer n'était pas probablement d'accord avec la formalisation des règles d'inférence logique employées dans les mathématiques intuitionnistes. Ainsi, pour des raisons particulières, il n'est pas pensable que Brouwer approuve cette lecture qui, bien qu'elle fasse impliquer la logique de l'ontologie, permet de remettre la logique au cœur de la pratique des mathématiques constructives.

[11] « Due to the nature of the allowed objects (item 1) and abstractions (item 2), the understanding of mathematical statements should be based upon specially conceived constructive logical principles. For instance, the existence of an object with a given property should signify the possession of a way yielding a potentially feasible construction of an object with this property. The used apparatus of logical deduction should be based upon a constructive logic that would exclude the provability of pure existence theorems. Such a logic should be free, in particular, from the so-called "Law of the Excluded Middle" (viewed as a general logical principle) ». M. Nagorny, « Andrei Markov and mathematical constructivism », in : *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, Vol. 134, Proceedings of the Ninth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, coll. « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », 1994, p. 475.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

*calculatoires»*[12]. Pour les deux mathématiciens constructivistes, la motivation originaire de la direction constructive en mathématiques, à savoir de faire des preuves plus fortes qui permettent des interprétations calculables des théorèmes, est complètement satisfaite par l'usage de la logique intuitionniste sans aucune limitation du domaine du discours. S'il en est ainsi, les mathématiques constructives peuvent être développées en utilisant la logique intuitionniste sur n'importe quel objet mathématique raisonnablement défini, et pas seulement sur une classe d'« objets constructifs ». Ce point de vue a été d'abord évoqué dans Bridges [1975]. Du moins, Bridges n'est pas d'accord avec une caractérisation des mathématiques constructives par leur ontologie. Mais c'est Richman ([1990][13], [1996][14]) qui, le premier, a défendu systématiquement la caractérisation logique des mathématiques constructives. Une telle position a bien sûr une « mauvaise réputation » bien sûr chez la plupart des mathématiciens constructivistes qui, à la suite des pas pionniers du constructivisme, défendent la primauté des mathématiques sur la logique. Cette primauté, faut-il rappeler, faisait partie de la croyance de Brouwer, Heyting, Markov, Bishop et d'autres.

Dans les mathématiques intuitionnistes de l'école de Brouwer, l'idée est que l'objet, qui est envisagé comme « *la construction mathématique mentale* », « *nécessite en fait une autre forme de logique* »[15]. De même, l'essence du développement des mathématiques constructives de type de Markov est que les investigations se limitent aux processus constructifs set aux objets produits par ces processus constructifs. Dans ces mathématiques récursives, les objets constructifs (ou les objets déterminés par eux) forment le type naturellement admissible d'objets mathématiques à considérer. En expliquant dans l'introduction de ses *Notes on Constructive Mathematics* quel sens va être donné au mot constructif, Martin-Löf écrit : « *Tous les objets que nous considèrerons doivent être des objets constructifs par lesquels nous entendons des configurations finies de signes* »[16]. De plus, la considération de ces objets s'appuie sur une logique constructive particulière, tenant compte des particularités de la définition des objets constructifs. Dans les deux cas, les règles de la logique sont prescrites par l'univers du discours étudié. À l'encontre de cette thèse, la discussion de Richman semble suggérer que pour la compatibilité des mathématiques constructives avec les interprétations algorithmiques des concepts mathématiques aucune hypothèse de nature ontologique n'est nécessaire et seul l'usage de la logique constructive est suffisant pour un tel objectif. Pour lui, la fixation préalable de l'ontologie mathématique, comme témoigne la citation ci-dessus de M. Lof, est superflue. Cette thèse de Richman rime bien avec les élucidations ci-dessus, où il était précisé que l'interprétation algorithmique des jugements mathématique, qui constitue la motivation originaire des mathématiques constructives, est déterminée par le recours exclusif à la logique intuitionniste.

[12] « As we pointed out at the end of the preceding section, working with intuitionistic logic automatically bars non computational steps ». D. S. Bridges et L. S. Vîta, *Techniques of Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag, 2006, p. 7.
[13] F. Richman, «Intuitionism as generalization», in : *Philosophia Mathematica*, N°5, 1990, pp. 124-128.
[14] F. Richman, «Interview with a constructive mathematician», in : *Modern Logic*, Vol. 6, N°3, 1996, pp. 247-271.
[15] A. Heyting, *Intuitionism: An introduction*, 3 ème edition, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1971, p.1
[16] P. Martin-Löf, *Notes on Constructive Mathematics*, Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1970, p. 9.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

Cela dit, en ce qui concerne les mathématiques constructives de type de Bishop, la discussion de Richman selon laquelle les restrictions introduites sont des restrictions de type logique semble pleinement défendable. La conclusion intéressante à tirer de ce fait est que, par rapport aux mathématiques classiques, en mathématiques constructives il n'y a pas de restriction sur le type d'objets étudiés, mais seulement sur le type des méthodes approuvées. De cette vision, le passage de la logique classique à la logique intuitionniste est neutre par rapport à l'ontologie des mathématiques, quelle que soit la position philosophique que l'on maintient à son égard.

La position de Richman se distingue également par l'accent mis dans les mathématiques de type de Bishop sur la compatibilité entre les objets idéaux et ceux constructives. En effet, les mathématiques de Bishop étudient avec une méthodologie constructive, caractérisée par la restriction à la logique intuitionniste, les objets habituels de la tradition mathématique classique. Pour lui, les mathématiques de Bishop sont des « mathématiques constructives neutres » ce qui contredit la thèse souvent prônée. Bishop, lui-même, en reprochant les mathématiques classiques de faire confondre calculables et non calculables, écrivait :

> « Les mathématiciens classiques se préoccupent sporadiquement de savoir si les nombres peuvent être "calculés, mais seulement sur une base ad hoc. La distinction n'est pas observée dans le développement systématique des mathématiques classiques, et les outils dont dispose le classiciste ne lui permettraient pas d'observer systématiquement la distinction même s'il était si enclin »[17].

Il insiste sur la distinction entre « calculable » et « non calculable ». À l'encontre de cette thèse, la discussion de Richman suggère la compatibilité des objets idéaux et ceux constructifs. De ce point de vue, il y a une convergence sur l'ontologie entre les deux traditions classiques et constructives. Ces dernières étudient les « objets normaux »[18]. Pour lui, la clé du développement des mathématiques constructives était l'utilisation d'une logique intuitionniste et non pas la restriction de l'ontologie mathématique à un type particulier d'objets. Et par opposition à ce que Bishop aurait pu penser qu'il faisait, lorsqu'ils prouvent des théorèmes : en pratique, il fait des mathématiques, c'est-à-dire en étudiant des objets non habituels, avec une logique intuitionniste. La distinction calculable et non calculable ne fait aucune différence. Ce sont les modes de raisonnement logique utilisés pour les étudier qui font différence.

Pour tous les constructivistes de l'école des mathématiques intuitionnistes et celle de mathématiques récursives, la logique à utiliser pour faire des mathématiques algorithmiques est la logique constructive. De son expérience personnelle, Richman aboutit à une opinion similaire assimilant la tendance algorithmique à l'usage de la logique constructive. *« Mon sentiment est que les mathématiques constructives sont simplement des mathématiques faites dans le contexte de la*

[17] E. A. Bishop, « Schizophrenia in contemporary mathematics », in : M. Rosenblatt (Sous dir.), *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, Vol. 39, Rhodes Island, American Mathematical Society, 1985, p. 7.

[18] « To emphasise this point, which may come as a surprise to readers expecting here some version of hard-core constructivism, our experience of doing constructive mathematics suggests that we are dealing with normal mathematical objects, and working only with intuitionistic logic, and not the classical logic of normal mathematical practice ». D. S. Bridges & S. Reeves, « Constructive Mathematics in Theory and Programming Practice », in : *Philosophia Mathematica*, Vol. 7, Issue 1, 1999, p. 68.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

*logique intuitionniste* »[19], disait-il. Toutefois, comme témoigne cet extrait lui-même, pour Richman, l'application de la logique ne suppose aucune hypothèse ou condition sur la nature des objets considérés. L'usage de la logique suffit en soi pour faire des mathématiques algorithmiques. Cela revient au fait que l'usage de cette logique « *semble ne produire que des arguments de caractère entièrement algorithmique* »[20]. Autrement dit, « *les mathématiciens constructifs travaillent dans une logique intuitionniste, toutes les mathématiques réalisées dans le cadre de la logique intuitionniste sont jugées constructives par eux* »[21]. La logique intuitionniste capture donc parfaitement les processus de preuve utilisés lorsque nous travaillons de manière rigoureusement algorithmique. En fait, pour faire les choses de manière constructive, nous devons travailler dans un cadre algorithmique, et nous n'avons pas besoin d'un peu plus qu'un simple changement de la logique classique par la logique intuitionniste. En particulier, aucune hypothèse n'est nécessaire à postuler par le mathématicien constructiviste. « *Nous voyons donc, disait Richman, quelles sont les règles que les constructivistes veulent changer : rien de moins que les règles de la logique* »[22].

Ainsi, il y a lieu de dire que tant que nous nous en tenons strictement à la logique intuitionniste, les mathématiques que nous développons se révèlent calculatoires, en ce sens que chaque preuve montre implicitement que si nous effectuons certains calculs, nous obtiendrons certains résultats. Plus précisément, tant que le tiers exclu, et donc la preuve par contradiction, est évité, les mathématiques sont réduites à des calculs ; les procédures de calcul (programmes) seront plus explicites dans les preuves constructives. Richman nous confirme cette dernière thèse. Selon la manière dont il a considéré ses activités et son expérience personnelle, pour faire des mathématiques constructives, il suffit de travailler avec une logique intuitionniste. L'expérience montre que la voie qui suit une logique intuitionniste permet de rester dans des limites algorithmiques strictes et suffit à maintenir le mathématicien dans des limites constructives. Cette observation qu'il a tirée de ses propres activités de recherches l'a conduit à croire que la motivation algorithmique originale de l'approche constructive est complètement satisfaite par l'usage de logique intuitionniste. Ainsi, chacun est libre de considérer les objets qu'il voulait, les seules contraintes étant celles imposées par la logique intuitionniste. En fait, comme constate Richman de ses travaux effectifs en mathématiques constructives, cette logique garantit, semble-t-il, le caractère entièrement algorithmique des arguments produits. En particulier, les « *théorèmes*

[19] « My feeling is that constructive mathematics is simply mathematics done in the context of intuitionistic logic, that all the talk about algorithms is ultimately superfluous. In actual practice, it doesn't seem to make much difference which point of view you take ». F. Richman, « Interview with a constructive mathematician », in : *Modern Logic*, Vol. 6, N°3, 1996, p. 263.

[20] « In other words, algorithmic mathematics appears to be equivalent to mathematics that uses only intuitionistic logic ». *Op. cit.*

[21] « That is, constructive mathematicians work within intuitionistic logic, and any mathematics done in that framework will be judged constructive by them ». *Op. cit*, p. 253.

[22] « So we see what the rules are that constructivists want changed : no less than the rules of logic ». F. Richman, « Existence Proofs », in : *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, Issue 4, 1999, p. 306.

Il est peut-être instructif de noter que Richman réduit le clivage entre mathématiques traditionnelles et celles constructives à une opposition logique, c'est-à-dire qui ne fait pas différence à la nature des objets considérés. Par cela, il se sépare de Bishop et son école dont il est membre.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

*prouvés sans l'utilisation de LEM ont des interprétations calculatoires) valides que les théorèmes prouvés en utilisant LEM n'ont pas* »[23]. Cette observation permet déjà de conclure que « *les mathématiques algorithmiques semblent être équivalentes aux mathématiques qui n'utilisent que la logique intuitionniste* »[24]. Cela est vrai pour l'analyse aussi bien que l'algèbre. L'algèbre constructive n'est pas une algèbre qui porte sur un domaine de discours algébrique particulier ou qui limite l'ontologie algébrique à certains objets de nature particulière. L'algèbre constructive est complètement caractérisée par la logique adoptée qui est la logique constructive. C'est ce dont témoigne l'expérience professionnelle de trois parmi les grands contributeurs à la constructivisation de l'algèbre dans la citation suivante :

> « Il est important de garder à l'esprit que l'algèbre constructive est l'algèbre ; en fait, c'est une généralisation de l'algèbre en ce que nous ne supposons pas la loi du milieu exclu, tout comme la théorie des groupes est une généralisation de la théorie des groupes abélienne en ce que la loi commutative n'est pas supposée »[25].

## CONCLUSION :

En guise de conclusion, les distinctions de type constructif ou non constructif (tels que calculable ou non calculable, il y a un algorithme ou une routine finie capable en principe de les produire ou il n'y a pas un tel algorithme, etc.) ne semblent pas faire beaucoup de différence pour l'approche constructive. En revanche, les distinctions sur les domaines où les principes logiques portent bien sont décisives pour capturer la constructivité. En effet, l'usage de la logique constructive répond complètement à cette motivation originaire algorithmique de cette direction constructive. Si tel est le cas, nous pouvons alors pratiquer les mathématiques constructives en utilisant la logique intuitionniste sur n'importe quel objet mathématique raisonnablement défini, et pas seulement sur une classe d'« objets constructifs ».

S'il en est ainsi, la logique constructive, et non pas le domaine du discours considéré, semble être la caractéristique principale des mathématiques constructives. La nécessité d'utiliser une logique classique dans les mathématiques constructives n'est pas impliquée par une nature particulière des objets considérés dans ces mathématiques. En luttant contre le rôle fondationnel de la logique, au profit d'un fondement intuitif, Brouwer a inauguré une nouvelle direction en

---

[23] « Theorems proved without the use of LEM have valid computational interpretations that theorems proved using LEM do not ». *Op. cit.,* p. 267.
L'exemple cité par l'auteur dans ce propos c'est la démonstration constructive, dans le sens de Richman, c'est-à-dire sans utiliser LEM, que certains chiffres apparaissent infiniment souvent dans le développement décimal de pi. Cette preuve, contrairement à celle classique, contiendrait un moyen de saisir l'un de ces chiffres.

[24] « In other words, algorithmic mathematics appears to be equivalent to mathematics that uses only intuitionistic logic». D. S. Bridges & S. Reeves, « Constructive Mathematics in Theory and Programming Practice », in : *Philosophia Mathematica*, Vol. 7, Issue 1, 1999, p.68

[25] « It is important to keep in mind that constructive algebra is algebra; in fact it is a generalization of algebra in that we do not assume the law of excluded middle, just as group theory is a generalization of abelian group theory in that the commutative law is not assumed ». R. Mines, F. Richman & W. Ruitenburg, *A Course in Constructive Algebra*, New York, Springer-Verlag, 1988, p. vii.


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

mathématiques qui est la direction constructive. Toutefois, il s'est avéré que pour faire les mathématiques d'une manière algorithmique, une logique constructive est indispensable. Plus important, il s'est avéré que l'usage de cette logique, et non aucune autre exigence ontologique sur le domaine des objets considérés, suffit pour aller dans une voie constructive. La primauté de l'ontologie sur la logique n'est pas du tout vérifiée. Cette logique constructive, inhérente à cette voie constructive, est simplement exigée par la méthode de raisonnement et elle est conforme à notre objectif lorsqu'on veut faire des mathématiques algorithmiques. Elle est donc introduite pour des raisons mathématiques et méthodologiques plutôt que des raisons ontologiques.

Le passage de la logique classique à celle constructive est dicté par le désir de n'utiliser que des techniques constructives. En adoptant uniquement des méthodes constructives, on doit changer notre arsenal logique. Ce passage n'a pas d'effet sur les objets étudiés. La restriction méthodologique implique celle logique. Aucune restriction de type ontologique n'est impliquée par ce passage. La considération des méthodes purement constructives n'induit d'aucune façon la considération exclusive d'un certain type particulier d'entités mathématiques et l'exclusion des autres. Si des restrictions ontologiques ont eu lieu dans les mathématiques intuitionnistes ou dans les mathématiques récursives (l'école russe de Markov aussi bien que dans les mathématiques récursives de Man-Lof), ceux-ci sont induites par la supposition de considérations non logiques spécifiques. La limitation du domaine du discours dans les mathématiques récursives par exemple, où seuls des nombres récursifs sont considérés, ne trouve pas sa source dans la restriction des règles accompagnant le passage à la logique constructive. La considération exclusive des nombres réels qui satisfont la condition spécifique d'être définissables de manière récursive semble plutôt la conséquence de l'adoption des règles strictes du langage théorique des fonctions récursives. Cette rigidité théorique rendait difficile la considération de nombres les réels non récursifs et, conséquemment, la réalisation d'une analyse d'une manière qui soit naturelle, voir homologue à celle habituelle (classique). Également, dans les mathématiques intuitionnistes, les restrictions de type ontologiques sont, semble-t-il induit par le principe métaphysique considérant les entités mathématiques comme des constructions mentales et la clarté intuitive comme le modèle de clarté ce qui conduit au rejet des objets dont nous n'avons une représentation ou une image intuitive claire. En dernier lieu, cette limitation ontologique trouve sa source, finalement, dans l'idée intuitionniste selon laquelle les structures mentales telles que la cognition et la perception sont activement construites par l'esprit plutôt que passivement acquis. Dans ce cas ou l'autre, les restrictions ontologiques sont induites par l'hypothèse de principes non logiques particuliers, qui ont pour effet de limiter le domaine du discours à des objets particuliers qui satisfont des conditions spécifiques. Bien plus, ces principes non logiques ne peuvent être tenus pour responsable de l'étroitesse des objets autorisés par le point de vue constructiviste. Sans donc nier qu'il puisse y avoir des considérations philosophiques sur l'ontologie mathématique dont l'issue pourrait affecter de manière significative la propre activité mathématique ainsi que l'arsenal logique employé pour manier cette activité, je dis simplement qu'une telle hypothèse n'est pas nécessaire pour faire les mathématiques de manière constructive. Le changement de l'arsenal logique, exigé pour faire des mathématiques algorithmiques ne demande pas un changement parallèle qui affecte l'univers du discours. Seules les méthodes servent à expliquer les lois logiques. Les objets ne font pas. C'est


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

l'idée principale que je propose comme une réponse à notre question de départ. Cette réponse est aussi une critique d'une conception courante du constructivisme mathématique.

## BIBLIOGRAPHIE

### Ouvrages :


- Aristote, *Premiers Analytiques, I 1.*
- Aristote, *Physics*. *Books III and IV,* trad. Ang. E. Hussey, Oxford, Clarendon Press, 1983.
- Beeson, M. J., *Foundations of Constructive Mathematics*, Berlin, Springer, 1985.
- Bishop, E. A., *Foundations of constructive analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967.
- Bishop, E. A., « Schizophrenia in contemporary mathematics », in : M. Rosenblatt (Sous dir.), *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research,* Vol. 39, Rhodes Island, American Mathematical Society, 1985.
- Bishop, E. A. et Bridges, D. S., *Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag, 1985.
- Bridges, D. S. et Richman, F., *Varieties of constructive mathematics*, London, Cambridge University Press, coll. « London Mathematical Society Lecture Note Series », Vol. 97, 1987.
- Bridges, D. S. et Vîta, L. S., *Techniques of Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag, 2006.
- Heyting, A., *Intuitionism: An introduction*, 3ème édition, New York, North-Holland Pub. Co., 1971.
- Kant, E., *Critique de la Raison Pure*, Tome 1, trad. fr. J. Tissot, Paris, Librairie Philosophique De Ladrange, 1846.
- Kushner, B. A., *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*, Trad. Ang. par E. Mendelson, Providence, Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Vol. 60, 1984.
- Martin-Löf, P., *Notes on Constructive Mathematics*, Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1970.
- Mines, R., Richman, F. & Ruitenburg, W., *A Course in Constructive Algebra*, New York, Springer-Verlag, 1988.
- Reid, C., *Hilbert-Courant*, New York, Springer-Verlag, 1986.


### Articles :


- Bauer, A., « Five stages of accepting constructive mathematics », in : *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 54, N° 3, 2017.
- Beeson, M. J., « Formalizing constructive mathematics: Why and how? », in : F. Richman (eds.), *Constructive Mathematics. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 873, Berlin, Springer, 1981.
- Bishop, E. A., « Mathematics as a Numerical Language », in : A. Kino, J. Myhill et R. E. Vesley (dir.), *Intuitionism and Proof Theory*. *Proceedings of the Summer Conference at*

*Buffalo N.Y. 1968*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », Vol. 60, 1970.

- Bishop, E. A., « Schizophrenia in contemporary mathematics », in : M. Rosenblatt (Sous dir.), *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, Vol. 39, Rhodes Island, American Mathematical Society, 1985.
- Bridges, D. S. & Reeves, S., « Constructive Mathematics in Theory and Programming Practice », in : *Philosophia Mathematica*, Vol. 7, Issue 1, 1999.
- Kreinovich, V., « Cantor's Paradise Regained: Constructive Mathematics from Brouwer to Kolmogorov to Gelfond », in : *Logic Programming. Knowledge Representation, and Nonmontonic Reasonning*, New York, Springer, 2011..
- Kronecker, L., « On the concept of number », trad. Eng by W. Ewald, in : W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert : A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Volume II, Oxford, Clarendon Press, 1996.
- Loeb, I., « Questioning Constructive Reverse Mathematics », in : *Constructivist Foundations*, Vol. 7, N°2, 2012.
- Markov, A. A., « An approach to constructive mathematical logic », in : B. van Rootselaar & J.F. Staal (eds.), *Logic, methodology and philosophy of science III : proceedings of the third International congress for logic, methodology and philosophy of science*, *Amsterdam, 1967*, Amsterdam, North-Holland, 1968.
- Markov, A. A., « On the logic of constructive mathematics », Trad. Eng. in : *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 25, 1970.
- Martin-Löf, P., « Constructive mathematics and computer programming », in : L. Jonathan Cohen, J. Los, H. Pfeiffer and K-P. Podewski (Eds.), *Logic, Methodology and the Philosophy of Science VI,* coll. « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », Vol. 104, 1982.
- Martin-Löf, P., & Lozinski, Z. A., « Constructive Mathematics and Computer Programming (and Discussion) », in : *Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences,* Vol. 312, Issue 1522, 1984.
- Nagorny, M., « Andrei Markov and mathematical constructivism », in : *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, Vol. 134, Proceedings of the Ninth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, coll. « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », 1994.
- Richman, F., «Intuitionism as generalization», in : *Philosophia Mathematica*, N°5, 1990.
- Richman, F., « Interview with a constructive mathematician », in : *Modern Logic*, Vol. 6, N°3, 1996.
- Richman, F., « Existence Proofs », in : *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, Issue 4, 1999.
- Smorynski, C., « The Incompleteness Theorems », in : J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, New York, North Holland Publishing, 1977.
- Van Atten, M., Sundholm, G., Bourdeau, M. et Van Atten, V., « « Que les principes de la logique ne sont pas fiables » : Nouvelle traduction française annotée et commentée de


ISSN: 3119-6837 - E-ISSN: 3119-6845
DÉPÔT LÉGAL: 2026PE0013

l'article de 1908 de L. E. J. Brouwer », in : *Revue d'histoire des sciences*, Tome 67, Issue 2, 2014.

**Sites web :**

– Kolmogorow, A. N., *On the Interpretation of Intuitionistic Logic*, [en ligne], disponible sur : « http://homepages.inf.ed.ac.uk/jmckinna/kolmogorov-1932.pdf ».