



Logique constructive (non duale) : une exigence de l'ontologie ou de la méthodologie ? (Partie 1)

Constructive (non-dual) logic: a requirement of ontology or methodology?(part 1)

د. صائب العمامي Dr. Saeb ELAMAMI

Enseignant vacataire

Institut Préparatoire aux Études Littéraires et de Sciences Humaines de Tunis

Université de Tunis

saeb.amami@gmail.com

Résumé :

La question sur laquelle porte cet article consiste à savoir si la nécessité d'utiliser une logique intuitionniste¹⁴⁸ dans les mathématiques constructives est impliquée par une nature particulière des objets considérés dans ces mathématiques ou que cette logique est simplement la méthode de raisonnement conforme à notre objectif lorsqu'on veut faire des mathématiques algorithmiques¹⁴⁹. Une manière plus concrète pour réfléchir sur cette question est d'interpréter le problème comme suit : « Les mathématiques constructives sont-elles caractérisées par des objets spéciaux étudiés ou par les manières au moyen desquelles on raisonne sur des objets « normaux », c'est-à-dire, finalement, caractérisées par la logique constructive ? ».

Mots-clés : logique constructive ; restrictions méthodologiques ; exigences ontologiques ; mathématiques algorithmiques.

Abstract:

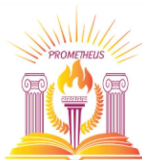
This article addresses the question of whether the need to use intuitionistic¹⁵⁰ logic in constructive mathematics is implied by a particular nature of the objects considered in this

¹⁴⁸ Dans le contexte des fondements des mathématiques, le terme « intuitionnisme » et « constructivisme » font référence à deux philosophies qui, partageant l'idée générale de la centralité des constructions en mathématiques, se distinguent sur le rôle de l'intuition et de la « clarté intuitive » dans cette opération. Dans cet article, j'utilise indifféremment l'expression « logique intuitionniste » et « logique constructive ». En fait, ce que la littérature de la philosophie et de la logique mathématique avait l'habitude de l'appeler « logique constructive » est la logique tirée et formalisée par Heyting et Kolmogorov à partir des mathématiques intuitionnistes de Brouwer. Ces points vont être illustrés plus tard.

¹⁴⁹ Faire des mathématiques de manière algorithmique signifie d'exposer explicitement tout objet ou algorithme dont le mathématicien prétend qu'il existe.

¹⁵⁰ In the context of the foundations of mathematics, the term « intuitionism » and « constructivism » refer to two philosophies which, sharing the general idea of the centrality of constructions in mathematics, differ on the role of intuition and « intuitive clarity » in this operation. In this article, I use the expression « intuitionistic logic » and « constructive logic » interchangeably. In fact, what the literature of philosophy and mathematical logic used to





mathematics, or whether this logic is simply the method of reasoning that best suits our objective when we want to do algorithmic¹⁵¹ mathematics. A more concrete way to consider this question is to interpret the problem as follows: « Are constructive mathematics characterized by the specific objects studied or by the ways in which we reason about « normal » objects, that is, ultimately, are they characterized by constructive logic? ».

Keywords : constructive logic; methodological restrictions; ontological requirements; algorithmic mathematics.

Introduction :

L'idée est que la caractérisation des mathématiques constructives par un domaine restreint du discours doit impliquer que la logique utilisée dans ces mathématiques est dictée par l'ontologie mathématique. Au contraire, la caractérisation logique des mathématiques constructives devrait nous apprendre que la logique constructive n'est pas la science de raisonnement impliquée par la nature des objets considérés, mais par l'issue et le produit auxquels nous voulons aboutir par notre pratique mathématique. Cet article défend la deuxième alternative.

En raison de contraintes d'ampleur et de structuration, cet article sera réparti en deux parties. La défense de la thèse décrite ci-dessus sera donc organisée en deux moments. Le second moment expliquera dans quel sens la logique constructive est une implication méthodologique et non pas ontologique. Le premier moment, quant à lui, fera l'objet de la présente partie, qui aura un caractère introductif et sera consacrée au positionnement du problème ainsi qu'à une caractérisation générale de la logique constructive par rapport à la logique classique.

I) Positionnement du problème : le passage à des logiques différentes est-il induit par l'étude d'objets différents ?

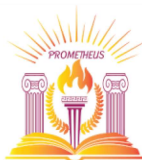
I-1) Le récit officiel : les restrictions logiques sont induites par des limitations du domaine du discours

Il n'y a pas de doute que les critiques acerbes que Brouwer avait assignées au programme de Cantor sont fondées sur des principes qui dépassent l'avènement des paradoxes de la théorie des ensembles et les difficultés liées à son enseignement pour porter sur les principes même des mathématiques classiques. C'est pour cette raison qu'à côté de son approche logico-fondationnel des mathématiques, qui est l'intuitionnisme, il avait proposé des mathématiques nouvelles ; des mathématiques intuitionnistes. Cela prouve que le différend avec les

call « constructive logic » is the logic drawn and formalized by Heyting and Kolmogorov from the intuitionist mathematics of Brouwer. These points will be illustrated later.

¹⁵¹ Doing mathematics algorithmically means explicitly stating any object or algorithm that the mathematician claims exists.





mathématiques classiques est une question de principe et qu'aucune preuve de cohérence, même la plus convaincante, ne rendrait les principaux concepts de ces mathématiques plus acceptables. En effet, bien que personne ne soutienne que les paradoxes (de type ensembliste) étaient sans importance, il y a cependant lieu de dire que leur danger a été exagéré. Et d'ailleurs, comme disait Beeson, « *Personne ne croyait sérieusement que les mathématiques réelles (à propos des séries de Fourier, par exemple) étaient mises en danger* »¹⁵². Et de toutes les façons, selon l'esprit de Brouwer, la cohérence d'un système ne suffit pas à relier les preuves et les définitions qu'il contient aux constructions. Cela s'explique par l'absence, chez l'intuitionniste, d'un lien fort entre la logique et la construction.

« La cohérence, disait Iris Loeb, n'implique pas de validité intuitionniste et, par conséquent, il peut y avoir (et il existe en fait) de nombreux principes qui ne provoquent pas de contradiction, mais qui ne sont toujours pas acceptables »¹⁵³.

Cela dit, la cohérence des mathématiques, menacée par les paradoxes ensemblistes, n'est pas le premier souci des mathématiciens intuitionnistes et constructivistes pour faire des mathématiques de manière constructive ; ce n'est plus la motivation originaire de l'approche constructive en mathématiques. L'intérêt des paradoxes était donc principalement philosophique. C'est pour cette raison que la direction constructive en mathématiques, initiée par Brouwer, était un projet pratique qui avait cherché à proposer aux mathématiciens une alternative plausible aux mathématiques classiques. Ce projet mathématique se réduit à une constructivisation de ces mathématiques trop abstraites et fondées sur des principes logiques « qui ne sont pas *fiabiles* »¹⁵⁴.

Le projet pratique de Brouwer était de construire les mathématiques sur la base de « *constructions mathématiques mentales* »¹⁵⁵, intuitivement claires et potentiellement réalisables, loin des abstractions inutiles et sans recourir du tout au concept vague d'« ensemble ». Cette direction, comme souvent présentée dans la littérature des fondements des mathématiques, est motivée par une vue philosophique qui réduit la nature des objets mathématiques légitimes à des produits de processus constructifs réalisables par le sujet mathématique. Ce principe, dit

principe constructif, est à l'origine du programme de Brouwer qui consiste à faire des mathématiques un traitement de « constructions mentales » fondé sur l'intuition.

¹⁵² « Nobody seriously believed that actual mathematics (about Fourier series, for example) was placed in danger ». M. J. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics*, Berlin, Springer, 1985, p. 422.

¹⁵³ « Consistency does not imply intuitionistic validity and therefore there may be (and actually are) many principles that do not cause contradictions but still are not acceptable ». I. Loeb, « Questioning Constructive Reverse Mathematics », in : *Constructivist Foundations*, Vol. 7, N°2, 2012, p. 133.

¹⁵⁴ « Que les principes de la logique ne sont pas fiables ». C'est le titre d'un très fameux article de Brouwer, daté de 1908. Pour une traduction française, voir M. Van Atten, G. Sundholm, M. Bourdeau et V. Van Atten « « Que les principes de la logique ne sont pas fiables » : Nouvelle traduction française annotée et commentée de l'article de 1908 de L. E. J. Brouwer », in : *Revue d'histoire des sciences*, Tome 67, Issue 2, 2014.

¹⁵⁵ A. Heyting, *Intuitionism: An introduction*, 3^{ème} édition, New York, North-Holland Pub. Co, 1971, p. 1.





Toutefois, au cours de la mise en œuvre de ce programme, en examinant la logique classique de manière critique, Brouwer s'est conduit à constater qu'avec une compréhension intuitionniste des jugements sur les constructions qu'il envisageait, la soi-disant loi du milieu exclu, et avec elle la méthode « par contradiction » qui en découle, perdaient le statut de normes logiques générales qui leur étaient traditionnellement attribuées. Depuis 1908, le mathématicien néerlandais avait découvert que si les objets considérés devaient être exclusivement « des constructions » de l'esprit, alors les mathématiques nécessitent une logique plus subtile, dans laquelle la vérité a une qualité positive plus forte que la négation de la fausseté. Il montrait de manière convaincante que, lorsqu'on considère des constructions mathématiques, il est nécessaire d'appliquer une logique spéciale, intuitionniste, dans laquelle, en particulier, ni la loi du tiers exclu ni encore la loi de dénégation ne peuvent prétendre l'universalité. Il s'est rendu compte dès lors que le traitement des seuls objets constructifs entraînait certaines conséquences qui contredisaient la logique classique adoptée dans les mathématiques classiques. L'une de ces conséquences étranges à ces mathématiques traditionnelles est le rejet de la loi du tiers exclu en tant qu'outil de raisonnement mathématique. Il n'était pas possible, en effet, de traiter constructivement les objets de manière à valider le tiers exclu. Cela amène les mathématiciens qui empruntent cette voie constructive à substituer la logique d'Aristote par une nouvelle logique dans laquelle les procédures non constructives deviennent illégitimes. En particulier, la négation et les affirmations existentielles vont nécessiter des procédures constructives. En effet, dans cette nouvelle logique, pensée ici comme la logique spécifiée aux objets conçus comme des « constructions mentales », *« les notions logiques de proposition, de preuve, de vérité, etc. reçoivent des interprétations véritablement nouvelles »*¹⁵⁶.

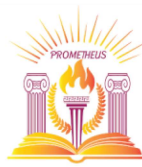
Selon ce récit dominant dans la philosophie des mathématiques, les restrictions sur le type d'objets étudiés, introduites par Brouwer pour des raisons philosophiques de clarté et d'appréciation du sens intuitif, semblent avoir un impact sur les méthodes de raisonnement utilisées pour les étudier. C'est-à-dire que les mathématiques de Brouwer étudient avec une méthodologie intuitionniste, caractérisée par la restriction à la logique intuitionniste, les objets constructifs. Plus généralement, dans cette vision, pour les mathématiques constructives, les restrictions sur l'ontologie des objets considérés sont induites par l'hypothèse de principes philosophiques particuliers, qui ont pour effet de limiter le domaine du discours à des objets particuliers qui satisfont à des conditions spécifiques (des constructions mentales pour l'école des mathématiques intuitionnistes de Brouwer, des algorithmes - ou processus constructifs¹⁵⁷ - pour l'école réursive de Markov, des routines finies¹⁵⁸ pour l'école des mathématiques

¹⁵⁶ P. Martin-Löf, « Constructive mathematics and computer programming », in : L. Jonathan Cohen, J. Los, H. Pfeiffer and K-P. Podewski (Eds.), *Logic, Methodology and the Philosophy of Science VI*, coll. « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », Vol. 104, 1982, p. 156.

¹⁵⁷ C'est-à-dire des processus réalisables par la subjectivité humaine.

¹⁵⁸ Une routine finie est un procédé exécutable par un nombre fini d'étapes et en temps fini par des êtres humains ou par des machines.





constructives de Bishop). Par exemple, dans le cas des mathématiques récursives, la plupart des nombres réels sont exclus ; seulement les réels qui sont définissables de manière récursive¹⁵⁹, c'est-à-dire seuls les réels récursifs sont étudiés. Cela impose, semble-t-il, l'application d'une logique adéquate qui est la logique constructive, capable de capturer le sens algorithmique voulu.

D'une manière générale, il est souvent accepté que les restrictions imposées sur l'ontologie des mathématiques elle-même par rapport aux mathématiques classiques semblent imposer des limites sur les règles d'inférence adaptées pour gérer ce domaine restreint du discours. Dans cette vision largement partagée, il semble donc que la logique est dictée par l'ontologique. Toutefois, comme je veux préciser dans cet article, cette thèse affirmant que les restrictions logiques sont la conséquence de restrictions ontologiques n'est pas un sujet unanimement accepté.

I-2) La mise en question du récit officiel : une question non tranchante

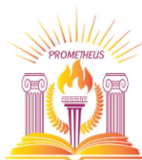
La motivation constructive originale de l'approche constructive initiée par Brouwer a conduit ce dernier à considérer seulement une classe spéciale d'objets dits "des constructions mentales" et le traitement de ces objets l'a amené à n'utiliser que la logique intuitionniste. Une réinterprétation de tous les connecteurs et quantificateurs logiques était indispensable pour réussir cette approche constructive dans laquelle seuls les objets constructifs sont à considérer. Cette lecture est soutenue par V. Kreinovich. Selon ce mathématicien russe de l'école récursive, Brouwer avait constaté que, « *puisque nous avons effectivement besoin de construire des objets, nous devons donc changer le sens du quantificateur existentiel en mathématiques* »¹⁶⁰. Et c'est pour cela qu'il a donc proposé de nouvelles mathématiques. Ainsi, le programme brouwerien de la constructivisation des mathématiques était aussi un programme de constructivisation de la logique « classique ». Cette constructivisation de la logique va aboutir à la naissance d'une « logique constructive », en tant qu'ensemble des normes de raisonnement acceptées pour faire des mathématiques de manière constructive.

Cette logique « constructive » va être expliquée pour la première fois par A. Heyting ; elle était tirée de la pratique mathématique de L. E. J. Brouwer et son école intuitionniste. Plus tard, elle va être approuvée par les mathématiciens constructivistes. Et d'ailleurs, les théorèmes prouvés

¹⁵⁹ Dans l'analyse récursive, on adopte le point de vue suivant : $\exists x p(x)$ veut dire l'affirmation selon laquelle une fonction récursive qui produit x . D'autre part, une fonction est dite récursive quand elle s'appelle elle-même une ou plusieurs fois. Pour les détails, voir M. J. Beeson, « Formalizing constructive mathematics: Why and how? », in : F. Richman (eds.), *Constructive Mathematics. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 873, Berlin, Springer, 1981, p.147.

¹⁶⁰ V. Kreinovich, « Cantor's Paradise Regained: Constructive Mathematics from Brouwer to Kolmogorov to Gelfond », in : *Logic Programming. Knowledge Representation, and Nonmonotonic Reasoning*, New York, Springer, 2011, p. 183.





dans presque toutes les écoles constructivistes sont établis selon cette logique. Celle-ci est, semble-t-il, formulée sur la base de l'hypothèse prenant en compte le caractère spécifique des objets constructifs. C'est pour cela qu'il y a lieu de penser que c'est l'ontologie mathématique, voire le type d'objets étudiés, qui dicte les règles de raisonnement acceptables. Markov¹⁶¹, par exemple, approuve cette idée selon laquelle l'étude d'objets différents peut exiger des logiques différentes. Cette idée de la nécessité de la logique intuitionniste pour faire des mathématiques constructives est aussi partagée par Bishop qui reste non tranchant sur la question de savoir si les restrictions logiques sont induites par la restriction ontologique des entités mathématiques. C'est dont témoigne cet extrait :

« Afin de travailler de manière constructive, nous devons réinterpréter non seulement le quantificateur existentiel, mais tous les connecteurs et quantificateurs logiques comme des instructions sur la façon de construire une preuve de l'énoncé impliquant ces expressions logiques »¹⁶².

Nous savons que la philosophie de Bishop semble suggérer une réduction ontologique des entités mathématiques aux nombres naturels¹⁶³. Sa défense de l'appréciation du sens numérique, au point où il considère son avilissement « un scandale »¹⁶⁴ des mathématiques contemporaines, est très connue. Dans cette lecture de la position de Bishop, il y a lieu de dire qu'on est près de l'idée que chaque entité mathématique peut finalement être réduite à une combinaison de nombres naturels. Cela rappelle de l'idée de Kronecker¹⁶⁵ d'un accès épistémique direct aux nombres naturels garantie par une assurance divine. Cependant, nous savons que Bishop rejette ce genre de « Cadeaux »¹⁶⁶ d'origine non humaine. Sans aller très

¹⁶¹ A. A. Markov, « On the logic of constructive mathematics », Trad. Eng. in : *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 25, 1970.

¹⁶² « Constructive mathematics is distinguished from its traditional counterpart, classical mathematics, by the strict interpretation of the phrase "there exists" as "we can construct". In order to work constructively, we need to re-interpret not only the existential quantifier but all the logical connectives and quantifiers as instructions on how to construct a proof of the statement involving these logical expressions" Constructive Mathematics ». E. A. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967, p. 5.

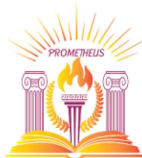
¹⁶³ « Ainsi, par "constructif", j'entendrai une mathématique qui décrit ou prédit les résultats de certains calculs finement exécutables, quoique hypothétiques, dans l'ensemble des nombres entiers ». E. A. Bishop, « Mathematics as a Numerical Language », in : A. Kino, J. Myhill et R. E. Vesley (dir.), *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N.Y. 1968*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », Vol. 60, 1970, p. 53.

¹⁶⁴ « Our motivation is the well-known scandal, exposed by Brouwer (and others) in great detail, that classical mathematics is deficient in numerical meaning ». *Op. cit.*, p. ix.

¹⁶⁵ « Dieu a créé les nombres naturels, tout le reste est l'œuvre de l'homme ». Ou, dans l'origine : « Die Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk ». C'est la célèbre remarque de Kronecker prononcée en 1880. L. Kronecker, « On the concept of number », trad. Eng by W. Ewald, in : W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert : A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Volume II, Oxford, Clarendon Press, 1996.

¹⁶⁶ « Quand un homme prouve l'existence d'un entier positif, disait Bishop, il doit montrer comment le trouver. Si Dieu a ses propres mathématiques qui doivent être faites, laissez-le faire lui-même ».





loin dans ce développement, je dis simplement que Bishop n'est pas ferme sur la nature philosophique de la motivation de la logique constructive. Dans tous les cas, nous allons voir que la clarification de ce point vague va conduire à une dissidence philosophique dans les adeptes des mathématiques constructives de type de Bishop. En effet, ce qui ressemble une division dans le camp des tenants des mathématiques constructives de type de Bishop en deux sous-écoles, F. Richman va soutenir une position qui, contre les fondateurs du constructivisme et leurs précurseurs, met la logique au-dessus de l'ontologie.

De ma part, comme il va être précisé, à cette thèse dominante selon laquelle les restrictions logiques sont induites par des restrictions imposées au domaine du discours, j'objectais qu'il s'agissait là d'un préjugé tenace, mais sans fondement et, de plus, dangereux en ce qu'il restreignait abusivement le champ des objets étudiés en divisant l'ontologie mathématique. Avant d'en venir là, dans la dernière rubrique de cet article, il ne sera peut-être pas inutile de fixer les points d'accords puis de préciser mon plan.

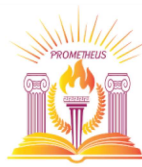
Retenons donc que, avec le développement des mathématiques intuitionnistes de Brouwer, deux sciences des méthodes de raisonnement sont donc suggérées : outre la logique habituelle, d'origine aristotélicienne, une nouvelle logique constructive surgit. Les différences fondamentales avec la logique traditionnelle se posent essentiellement lors du traitement des propositions et des disjonctions existentielles.

Dans la suite de cet article, je propose de porter mon attention sur la logique constructive. À ce propos, je commencerai par une comparaison des deux méthodes de raisonnement, à savoir la logique constructive et celle qui est classique. Pour ce faire, je reviendrai très vite sur les deux caractérisations habituelles de la logique. Je rappellerai, en deuxième lieu, les principales règles de raisonnement adoptées en logique classique. Je passerai, en troisième lieu à la logique constructive pour relever ses points de démarcation par rapport à la logique habituelle. Ensuite, dans un deuxième moment, je concentrerai mon attention sur la mise en clair du lien entre le

« When a man proves a positive integer to exist, he should show how to find it. If God has mathematics of his own that needs to be done, let him do it himself». E. A. Bishop et D. S. Bridges, *Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag, 1985, p. 6. Voir aussi E. A. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967, p. 2.

Ce point est confus chez Bishop car il considère, dans l'esprit de Kronecker, que les entiers sont les seuls objets irréductibles. D'ailleurs, pour lui, toutes les mathématiques se préoccupent de la description précise des procédures (abstraites) finement exécutables. Il a déclaré, sur la première page de son « *Mathematics as a numerical language* » qu'il propose « dans l'esprit de Kronecker plutôt que de Brouwer, que les entiers sont la seule construction mathématique irréductible ». Or si les entiers seront compris dans le sens de Kronecker alors ils seront des objets abstraits indépendants de l'esprit puisque créés par Dieu. Toutefois, s'il faut rejeter les cadeaux de Dieu, comme il propose sur la deuxième page de *Foundations of constructive analysis*, cela implique évidemment le rejet des entiers comme des objets irréductibles. Dans ce cas, les entiers eux-mêmes devraient être construits. En effet, s'il reproche aux mathématiques classiques le fait que l'explication d'« existe » ne renvoie pas aux pouvoirs d'un homme fini, mais à ceux d'un Dieu, il devrait lui-même rejeter l'explication d'« existe » dans ce sens pour les entiers. Brouwer, semble échapper à cette difficulté puisqu'il suppose que les entiers sont des créations de notre esprit.





traitement prudent du langage et l'accréditation de la logique constructive ainsi que du lien entre l'adoption de cette logique et l'approbation d'une tendance algorithmique. Pour ce faire, je procèderai en deux étapes. L'objet de la première étape sera la clarification du sens dans lequel le maintien de certaines distinctions significatives conduit au rejet des preuves par contradiction. À cet égard, je porterai l'accent sur l'élucidation de certains éclaircissements apportés par les distinctions significatives maintenues concernant le sens de l'expression « il existe », qui sont les conséquences de l'accréditation de cette nouvelle logique. Je finirai, en dernier moment, par montrer que 1) l'usage de la logique constructive est complètement suffisant pour faire des mathématiques de manière algorithmique et que 2) ces mathématiques traitent des objets normaux des mathématiques classiques, mais elles se distinguent uniquement par les outils accrédités pour les traiter, à savoir par la logique constructive. J'utilise ces deux résultats (la compatibilité des objets idéaux et constructifs étudiés dans les deux mathématiques et l'incompatibilité des outils logiques) pour approuver une caractérisation logique et non ontologique des mathématiques constructives. Ce qui va me servir pour conclure que la logique constructive n'est pas impliquée par des raisons ontologiques, mais uniquement par des soucis méthodologiques (faire des preuves algorithmiques).

II) La logique constructive et la logique classique

II-1) Qu'est-ce que la logique ?

Il existe deux définitions traditionnelles concurrentes de la logique : l'une, dite rationaliste, identifie la logique à la science du vrai, l'autre, dite psychologue, assimile la logique à la science du raisonnement¹⁶⁷. La logique permet, en fait, de distinguer le vrai du faux. (C'est pour cela que nous disons que la logique est la science du vrai). Mais, la logique permet, également, de prémunir et préserver nos raisonnements contre les erreurs : c'est la science qui permet de guider nos raisonnements loin des erreurs, des paradoxes et des antinomies. Cette deuxième caractérisation est implicite dans la définition de l'inférence par Aristote. Dans les *Premiers Analytiques*, il écrivait : « le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ce qui a été posé résulte nécessairement du fait que ces choses soient telles »¹⁶⁸. Une conciliation de ces deux définitions permet de dire que la logique est l'étude des méthodes qui permettent d'établir qu'un énoncé est vrai, tels le raisonnement et le calcul.

Dans son sens moderne, la logique est la science des méthodes de raisonnement. Elle sert comme une théorie de déduction mathématique. C'est la tâche à laquelle se charge la logique après sa mathématisation. À vrai dire, depuis la fin du XIXe siècle, la logique a été happée par

¹⁶⁷Elle met en évidence les processus de production de la vérité et cela c'est l'affaire de la psychologie qui s'intéresse aux manières de la découverte de la vérité.

¹⁶⁸ Aristote, *Premiers Analytiques*, I 1, 24b 18-20.





les mathématiques. En effet, prévue pour formaliser¹⁶⁹ de façon uniforme les mathématiques, la logique ne s'intéresse plus qu'aux différentes théories mathématiques. Cette logique symbolique a fini par devenir une discipline mathématique à part entière¹⁷⁰. Paradoxalement, cette logique, dite « logique moderne », s'est retrouvée rapidement classique, à cause des critiques acerbes qui lui ont été assignées.

II-2) La logique classique

La logique classique se compose de deux parties ; d'abord, nous avons la logique des prédicats qui sert à étudier des quantificateurs existentiels et universels tels que « tout » et « rien », ou bien « aucun ». À titre d'exemple, « tout est content » pourrait s'écrire $\forall x E(x)$ et « rien n'est content », qu'on puisse l'écrire $\forall x \neg E(x)$ avec E est la propriété « être content ».

D'autre part, il y a la logique propositionnelle qui revient à l'étude des connecteurs logiques « ne... pas » ($\neg$), « et » ($\wedge$), « ou bien... ou bien » ($\vee$), et « si... alors » ($\Rightarrow$). Ces expressions correspondent à des formes grammaticales, principalement des conjonctions de coordination. Cependant, la logique ne s'intéresse pas, comme la grammaire, à des énoncés¹⁷¹ particuliers, comme, par exemple, si l'acier est un métal, alors ou bien l'acier est un métal ou bien il pleut sur Brest, mais plutôt à des schémas d'énoncés, comme si p, alors (p ou q). En effet, la perspective adoptée par la logique moderne consiste à s'intéresser aux connecteurs logiques eux-mêmes plutôt qu'aux propositions qu'ils permettent de construire. Dans ce propos, la logique propositionnelle permet de bâtir et de traiter des propositions composées à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge, \vee \Rightarrow$ selon certaines règles. Elle utilise ces signes dans le sens :

*p $\vee$ q signifie $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ ¹⁷².

* p $\wedge$ q signifie $\neg(\neg p \vee \neg q)$

¹⁶⁹Cela revient à présenter les théorèmes mathématiques comme des déductions réalisées selon certaines règles logiques à partir d'un nombre limité d'axiomes.

¹⁷⁰ La logique de l'Ecole est dévalorisée comme stérile par Kant, aussi bien que par Descartes. Selon Kant, « la logique est sortie close et achevée de l'esprit d'Aristote ». Elle n'a pas pu faire aucun pas en avant depuis Aristote.

E. Kant, *Critique de la Raison Pure*, Tome 1, trad. fr. J. Tissot, Paris, Librairie Philosophique De Ladrangue, 1846, p. 325.

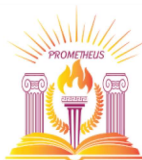
Le développement prodigieux de la logique mathématique montre les limites de cette vue de Kant.

¹⁷¹ On parlera d'énoncés (simples ou complexes) pour désigner les phrases du langage ordinaire (par exemple : « Il pleut sur Brest », « S'il pleut sur Brest, alors Dieu n'existe pas »). On appelle proposition toute expression susceptible d'être vraie ou fausse.

¹⁷² Le principe de non-contradiction veut dire qu'une proposition et sa négation ne peuvent pas être vraies en même temps ; P et $\neg P$ ne peuvent pas être simultanément vraies ; la conjonction « p et non-p » est nécessairement fausse : $\neg(p \wedge \neg p)$.

La loi du tiers exclu affirme que $P \vee \neg P$: elle soutient que soit une proposition est vraie, soit sa négation est vraie (p est vraie ou non p est vraie).





* $p \Rightarrow q$ signifie $\neg (p \wedge \neg q)$ ¹⁷³

* $\exists x p(x)$ signifie $\neg \forall x \neg p(x)$ ¹⁷⁴. De ce point de vue classique, la non-contradiction est le critère de l'existence.¹⁷⁵

Maintenant, puisque, comme indiqué plus haut, des critiques acerbes ont été assignées aux règles de la logique classique, une nouvelle science des méthodes de raisonnement a été suggérée par les constructivistes. Regardons dans la suite les principales caractéristiques de cette logique.

II-3) La logique constructive

II-3-i) La logique constructive ; une naissance mathématique

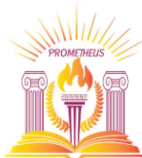
Une logique est pertinente si ses implications exigent que l'antécédent et le conséquent soient « liés de manière pertinente ». Or avec l'avènement de la logique constructive, il s'est avéré qu'il y a plusieurs possibilités de réaliser des liaisons pertinentes entre la partie conséquente, la partie antécédente. En réalité, cette logique constructive était une découverte exceptionnelle de Brouwer qui a constaté qu'avec une compréhension intuitionniste des jugements sur les constructions qu'il envisageait, la soi-disant loi du milieu exclu, et avec elle la méthode « par contradiction », perdait le statut de normes logiques générales qui leur étaient traditionnellement attribuées. À ce propos, il pourrait être instructif de noter que, la logique constructive était historiquement présentée systématiquement à partir de la pratique

¹⁷³ $p \Rightarrow q$ signifie $\neg (p \wedge \neg q)$ signifie q ou $\neg (p)$

¹⁷⁴ L'existence veut dire l'impossibilité de la non-existence : si la non-existence est impossible alors il y a une existence. Ce qui présuppose déjà le tiers exclu et plus précisément la loi de la double négation qui en découle : si non (non p) alors p : si la non-existence est contradictoire (impossible) alors il y a une existence. C'est une existence formelle, logique, idéaliste, voire non constructive ; Cette interprétation du quantificateur existentiel permet de montrer l'existence d'objet que personne ne peut définir, et encore moins construire ; on établit l'existence d'objets que personne n'avait jamais vus et que personne n'avait la moindre idée de la manière de construire. (Personne ne savait comment construire une telle chose). Comme disait Hilbert, « Si les axiomes donnés arbitrairement ne se contredisent pas par leurs conséquences, alors les objets définis à travers les axiomes existent ». Cité dans C. Smorynski, « The Incompleteness Theorems », in : J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, New York, North Holland Publishing, 1977, p. 825.

En 1920, David Hilbert a décidé d'intervenir contre Hermann Weyl qui a devenu la proie de la folie de Brouwer. Hilbert a observé que « ce que font Weyl et Brouwer revient à suivre les traces de Kronecker! Ils cherchent à sauver les mathématiques en jetant par-dessus tout ce qui est gênant Ils découperaient et manipuleraient la science. Si nous suivions une telle réforme que celle qu'ils suggèrent, nous dirigerions la risque de perdre une grande partie de nos trésors les plus précieux! ». D. Hilbert, cité à partir C. Reid, *Hilbert-Courant*, New York, Springer-Verlag, 1986, p. 155.





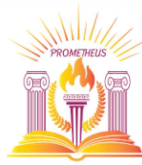
mathématique. En effet, comme j'ai mentionné précédemment, les règles de la logique sont d'abord formalisées par A. Heyting à partir des mathématiques intuitionnistes de Brouwer. Une telle tâche conduit rapidement hors du domaine du constructivisme naïf et réimplante la logique de nouveau au fond des mathématiques. Ce qui n'était pas certainement le désir de Brouwer. C'est son élève A. Heyting qui a réalisé en 1930, peut être contre la volonté de son professeur qui a préféré un fondement informel des mathématiques, une formalisation des règles de déduction de l'intuitionnisme. Le but était de trouver un système formel adapté aux mathématiques intuitionnistes. Pour ce faire, l'élève de Brouwer a donné des axiomes explicites pour cette logique. Ces axiomes n'étaient pas suffisamment intuitifs, mais un peu artificiels. Plus tard, Gerhard Gentzen va donner à cette logique constructive une définition naturelle et élégante.

Ce sur quoi je veux insister encore une fois ici c'est que cette logique constructive a été développée à partir de la pratique effective des mathématiques. Cela doit naturellement favoriser l'idée de la priorité des mathématiques par rapport à la logique. Ce qui reflète la primauté des mathématiques sur la logique qui faisait partie de la croyance de Brouwer, Heyting, Markov, Bishop et d'autres pionniers du constructivisme¹⁷⁶.

Toutefois, les mathématiques intuitionnistes elles-mêmes, et les mathématiques constructives en général, ont commencé par l'observation selon laquelle les sens en mathématiques de certains connecteurs, essentiellement le sens de la disjonction (« A ou B »), sont parfois différents de leurs sens intuitifs. S'il en est ainsi, il y a lieu de considérer que les mathématiques constructives sont aussi initiées par une observation logique qui avait permis de remarquer qu'il y a certaines distinctions entre les significations intuitives et celles mathématiques de certains connecteurs et quantificateurs logiques. C'est Brouwer qui avait, avant tous les autres, relevé ces nuances sémantiques entre l'usage mathématique et le sens intuitif. L'implication de ces différences est cruciale dès qu'elles aboutissent à un fait très dérangent selon Brouwer, à savoir que la validité classique de l'énoncé d'existence « $\exists x P(x)$ » n'implique pas sa validité constructive. L'analyse profonde de ces différences avait conduit, plus tard, Heyting et Kolmogorov à la « prise de conscience » de la nécessité de la distinction des deux sens. Ce qui avait amené finalement à la formalisation de la logique constructive. En effet, c'est pour capturer ce sens intuitif que les règles de la logique constructive étaient d'abord formalisées axiomatiquement par Heyting. Cette reconsidération du sens des connecteurs logiques, en particulier celle de la disjonction, affecte en premier lieu la signification du quantificateur existentiel et laisse, en conséquence, un impact direct sur la pratique mathématique. En effet, ces réinterprétations ont fourni des symboles et des règles pour manipuler les connecteurs et les quantificateurs qui correspondent aux types de raisonnement

¹⁷⁶ Cette position n'est pas partagée par tous les mathématiciens à persuasion constructiviste. Richman, par exemple, semble défendre la position opposée. Voir F. Richman, « Interview with a constructive mathematician », in : *Modern Logic*, Vol. 6, N° 3, 1996, p. 248.



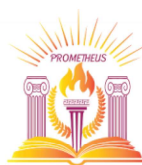


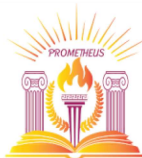
mathématique permis par les intuitionnistes. Ce développement de la sémantique constructive a été suivi par Kolmogoroff. C'est pour cette raison que l'aboutissement de cette interprétation, dite la « sémantique de la preuve », est appelée interprétation Brouwer-Heyting-Kolmogoroff (interprétation BHK).

Comme il était noté, cette sémantique formalise le sens intuitif des connecteurs et des quantificateurs logiques. Elle s'est avérée, en effet, très adéquate pour capturer le sens intuitif des règles et, ainsi, pour transformer le bon sens abstrait et la connaissance experte en un ensemble de règles constructives, voire des règles permettant de résoudre les problèmes de manière algorithmique. Ce système logique intuitionniste fournit une notion informelle de vérité intuitionniste. Il donne des explications des connecteurs logiques habituels du point de vue intuitionniste. D'où l'explication ; ou la sémantique, BHK de la vérité intuitionniste. Puisque les notions de construction de cette sémantique de BHK sont non précisées, cette interprétation (sémantique) est volontairement informelle. La première version concrète de la sémantique BHK était la réalisabilité originale des nombres de Kleene. C'est le premier exemple d'une sémantique de réalisabilité.

Ainsi, l'invention d'une logique plus faible, à partir de la pratique mathématique intuitionniste, permet de reconnaître certaines distinctions subtiles (des quantificateurs et des connecteurs logiques) et de choisir, parmi les notions classiquement équivalentes, celles les plus adaptées à un contexte donné ; cela permet aussi de préserver les différences que nous percevons entre les intuitions qui ont donné naissance à chaque notion. Cela semble suggérer que le passage de la logique classique à la logique intuitionniste peut être neutre par rapport à l'ontologie des mathématiques, quelle que soit la position philosophique que l'on maintient à son égard. Il en résulte, souligne le mathématicien constructif, une forme de mathématiques plus subtile et raffinée. À la lumière de ces arguments en faveur de la logique constructive, il est naturel de se demander s'ils suffiront à constater que la logique constructive peut être préférée pour des raisons simplement mathématiques (subtilité, généralité et profondeur). Bien qu'une hypothèse de ce type nécessite une argumentation minutieuse, il y a lieu de penser que l'hypothèse d'axiomes spécifiques de nature mathématique et logique peut avoir un impact direct sur les objets mathématiques envisagés par une théorie. Loin de développer davantage ce problème de la détermination de l'ontologie par la logique, je tiens à rappeler le point essentiel, à savoir que la clé du développement des mathématiques constructives était l'utilisation, au début non systématique (du moins avec Brouwer), de la logique constructive et que la nouvelle sémantique constructive était formalisée ensuite dans le système BHK.

Cette interprétation BHK des connecteurs logiques et des quantificateurs existentiels est grossièrement présentée ci-dessus. Puisqu'avec cette interprétation, la validité classique de l'énoncé d'existence $\exists x P(x)$ n'implique pas sa validité constructive, ce qui constitue l'impact le plus décisif sur le plan pratique, alors on a choisi de commencer cette présentation avec la notion constructive d'existence.





II-3-ii) La notion constructive d'existence

Le principe constructif, selon lequel les objets mathématiques sont le résultat de certains processus constructifs¹⁷⁷, a pour conséquence de soutenir un point de vue sur les assertions existentielles selon lequel l'existence d'un objet x avec une propriété P donnée ne peut être considérée comme établie que lorsque nous possédons un procédé régulier donnant une construction potentiellement réalisable de cet objet x vérifiant cette propriété requise P . La nature de ces objets, regardés strictement comme processus de construction, conduit à adopter ce traitement, voire cette interprétation, constructif des propositions existentielles. Au contraire, les lois de la logique classique sont aveugles sur les distinctions entre des propositions telles que « un objet x satisfaisant une propriété P existe » et « un objet x satisfaisant une propriété P ne peut pas manquer d'existence ». Or c'est cette distinction entre $\exists xP(x)$ et $\neg \forall x\neg P(x)$ qu'est rigoureusement capturée et fortement appréciée par la logique constructive.

L'appréciation de la différence entre l'existence et l'impossibilité de la non-existence est la conséquence d'une nouvelle définition de la négation qui trouve son origine chez Brouwer. Comme nous le disait, en effet, Kolmogorov, Brouwer a soumis la négation à une critique : « la logique Brouwer donne une nouvelle définition de la négation : « a est faux » devrait signifier « a conduit à une contradiction » »¹⁷⁸. De cette façon, la négation est envisagée comme un énoncé existentiel, puisque pour montrer que la déclaration a est faux, il faut qu'il « existe une chaîne de déductions logiques qui conduit de l'hypothèse de a à une contradiction »¹⁷⁹. Or, puisque cette notion de négation est au fond des preuves des énoncés existentiels (telles que les preuves indirectes de l'existence), la mise en question de cette notion de négation a un impact sur ce type d'énoncés, qui sont devenus pleinement acceptés dans les mathématiques classiques.

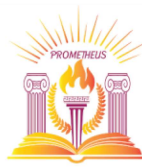
En fait, les déclarations existentielles aussi ont été sujet de critique de la part de Brouwer. Selon l'acception logique de Brouwer, pour dire qu'il y en a parmi les éléments d'une collection infinie A au moins un avec une propriété P , il faut d'abord expliciter cet élément. Sans la détermination de ce dernier, une telle affirmation existentielle serait sans signification. La simple démonstration de l'existence de l'élément sans présenter un algorithme pour sa construction effective est insuffisante pour la vérité de la déclaration existentielle qui serait

¹⁷⁷ C'est le principe dont nous venons de souligner qu'il est la première motivation de la direction constructive en mathématiques.

¹⁷⁸ « Brouwer gives a new definition of negation: "a is false" should mean "a leads to a contradiction" ». A. N. Kolmogorov, *On the Interpretation of Intuitionistic Logic*, [en ligne], disponible sur : « <http://homepages.inf.ed.ac.uk/jmckinna/kolmogorov-1932.pdf> », p. 6. Traduit de l'allemand par James McKinna, Édinburgh 2014.

¹⁷⁹ « There exists a chain of logical deductions which leads from the assumption of a to a contradiction ». *Ibid.*





fausse. Brouwer explique « *qu'il ne faut pas prononcer un énoncé existentiel, sans donner une construction correspondante* »¹⁸⁰. Brouwer a soutenu que cette nouvelle compréhension des quantificateurs existentiels est mieux conforme à notre intuition. Bien entendu, cette interprétation contredit la logique classique où, grâce au tiers exclu, un énoncé existentiel peut être affirmé par la simple contradiction de sa négation.

De ce qui précède, nous concluons que le principe constructif assimilant les objets mathématiques à des processus constructifs conduit à une réinterprétation de la sémantique mathématique. La direction constructive en mathématiques est liée, en fait, à un souci de « constructiviser » la sémantique des mathématiques. Un tel souci commence par un traitement prudent et attentif du langage mathématique. Cette reconsidération de la sémantique mathématique, c'est-à-dire la réinterprétation de la notion de l'existence en distinguant son acception constructive de celle non constructive, conduit à une reconsidération de la logique classique. D'où la logique constructive dont les règles permettent d'échapper aux inconvénients de la vue classique sur la signification des connecteurs logiques, des formules, etc. À cet égard, ces règles ne sont pas aveugles envers les nuances de significations. Elles capturent les distinctions significatives qui méritent d'être maintenues. Cette sensibilité envers le langage est déjà une des raisons pour laquelle la logique constructive est vantée par les constructivistes.

La logique constructive est un ensemble de principes logiques reconnus par les représentants du constructivisme (en mathématiques) et comprenant l'abstraction de l'infini potentiel¹⁸¹, mais pas celle réelle. Comme déjà précisé, cela modifie, d'une certaine manière, la

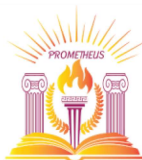
¹⁸⁰ « He merely explains, that one should not utter an existential statement, without giving a corresponding construction. On the other hand, for Brouwer an existential statement is no mere declaration ». *Ibid.*

¹⁸¹ L'infini potentiel est un concept qui désigne quelque chose « en puissance », mais qui n'est jamais réalisé, ou « en acte ». L'infini potentiel n'est donc jamais atteint et correspond à une limite potentielle et non achevée. Il s'oppose à l'infini en acte qui considère l'infini comme une entité achevée comme l'est l'ensemble des entiers naturels. Cette distinction des deux types d'infini revient, comme il est très connu, à Aristote. Ce dernier rejette l'infini en acte parce qu'il est source de paradoxes. Voir Aristote, *Physics. Books III and IV*, trad. Ang. E. Hussey, Oxford, Clarendon Press, 1983, p. 204 a 6.

Les arguments d'Aristote, en vigueur encore aujourd'hui chez les mathématiciens constructivistes qui refusent de penser l'infini actuel, ont fait autorité pendant des siècles. Pour eux, comme pour Aristote, l'infini est un concept qui désigne quelque chose « en puissance », mais il n'est jamais réalisé, ou « en acte ». Pour Kronecker, par exemple, l'infini actuel relève d'un au-delà, se prêtant à être réservé à Dieu pour rendre compte de son caractère inatteignable. Cette attribution va de pair avec la possibilité inimaginable d'accéder « à tous en même temps ». Or, cette possibilité ne pouvait qu'appartenir à Dieu.

Maintenant, l'abstraction de l'infini potentiel, ou aussi l'abstraction de la réalisabilité potentielle, est idée de faire abstraction des limites pratiques de la construction d'objets constructifs telles que les limites de l'espace, du temps et de notre nature humaine. Autrement, l'abstraction de la faisabilité potentielle (l'infini potentiel) est utilisée lorsque la conception est distraite des limites pratiques de l'espace, du temps et du matériau ». Dans ce sens, la réalisabilité potentielle consiste à « faire abstraction des limites réelles de nos possibilités constructives, imposées par le caractère limité de nos vies dans l'espace et dans le temps ». A. A. Markov, « An approach to constructive mathematical logic », in : B. van Rootselaar & J.F. Staal (eds.), *Logic, methodology and philosophy of science III*





compréhension des connecteurs logiques et des quantificateurs combinant cette compréhension avec des processus constructifs (processus décrits par des algorithmes). D'ailleurs, l'originalité de cette logique est l'introduction de connecteurs V^* , $\Rightarrow^*$ et du quantificateur $\exists^*$ dans un sens intraduisible en logique classique. Il s'agit de poser d'autres questions et d'obtenir d'autres réponses. Éluclions dans la suite les nouvelles interprétations de certains connecteurs logiques. Vue sa position centrale dans les sciences de déduction, classique et constructive, on commence les éclaircissements suivants par la clarification de la distinction des deux sens constructive et classique de la « disjonction ».

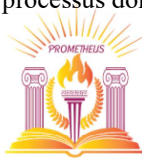
Bibliographie

Ouvrages :

- Aristote, *Premiers Analytiques*, I 1.
- Aristote, *Physics. Books III and IV*, trad. Ang. E. Hussey, Oxford, Clarendon Press, 1983.
- Beeson, M. J., *Foundations of Constructive Mathematics*, Berlin, Springer, 1985.
- Bishop, E. A., *Foundations of constructive analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967.
- Bishop, E. A., « Schizophrenia in contemporary mathematics », in : M. Rosenblatt (Sous dir.), *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, Vol. 39, Rhodes Island, American Mathematical Society, 1985.
- Bishop, E. A. et Bridges, D. S., *Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag, 1985.
- Bridges, D. S. et Richman, F., *Varieties of constructive mathematics*, London, Cambridge University Press, coll. « London Mathematical Society Lecture Note Series », Vol. 97, 1987.
- Bridges, D. S. et Vîta, L. S., *Techniques of Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag, 2006.
- Heyting, A., *Intuitionism: An introduction*, 3^{ème} édition, New York, North-Holland Pub. Co., 1971.

: *proceedings of the third International congress for logic, methodology and philosophy of science*, Amsterdam, 1967, Amsterdam, North-Holland, 1968, p. 283.

En revanche, sous l'influence des méthodes abstraites de la théorie des ensembles, les mathématiques classiques tolèrent l'infini en acte, comme témoigne l'acceptation de l'ensemble des entiers naturels, considéré comme une entité achevée. Le nœud de l'insistance des constructivistes stricts que les mathématiques classiques n'ont pas de sens revient à leur opinion selon laquelle il n'est pas significatif de parler de l'achèvement d'un processus de calcul nécessitant un nombre infini d'étapes. Or, les méthodes liées à l'abstraction de l'infini actuel, qui présupposent le critère existentiel de l'infini, tolèrent des raisonnements qui supposent l'achèvement de processus nécessitant une infinité d'étapes. En fait, dans ces mathématiques, nous avons des raisonnements supposant une « acte » arbitraire fait un nombre infini de fois. Ces modes de raisonnement se fient à un acte arbitraire répété transfiniment. C'est le cas des raisonnements se fiant au principe de Zermelo (Le principe de choix) ou au tiers exclu appliqué pour attribuer une propriété P aux éléments d'un ensemble infini. L'abstraction de l'infini réel dans ce type de raisonnement ignore l'impossibilité d'achever le processus donné, voire l'inépuisabilité de l'infini.





- Kant, E., *Critique de la Raison Pure*, Tome 1, trad. fr. J. Tissot, Paris, Librairie Philosophique De Ladrage, 1846.
- Kushner, B. A., *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*, Trad. Ang. par E. Mendelson, Providence, Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Vol. 60, 1984.
- Martin-Löf, P., *Notes on Constructive Mathematics*, Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1970.
- Mines, R., Richman, F. & Ruitenburg, W., *A Course in Constructive Algebra*, New York, Springer-Verlag, 1988.
- Reid, C., *Hilbert-Courant*, New York, Springer-Verlag, 1986

Articles :

- Bauer, A., « Five stages of accepting constructive mathematics », in : *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 54, N° 3, 2017.
- Beeson, M. J., « Formalizing constructive mathematics: Why and how? », in : F. Richman (eds.), *Constructive Mathematics. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 873, Berlin, Springer, 1981.
- Bishop, E. A., « Mathematics as a Numerical Language », in : A. Kino, J. Myhill et R. E. Vesley (dir.), *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N.Y. 1968*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », Vol. 60, 1970.
- Bishop, E. A., « Schizophrenia in contemporary mathematics », in : M. Rosenblatt (Sous dir.), *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, Vol. 39, Rhodes Island, American Mathematical Society, 1985.
- Bridges, D. S. & Reeves, S., « Constructive Mathematics in Theory and Programming Practice », in : *Philosophia Mathematica*, Vol. 7, Issue 1, 1999.
- Kreinovich, V., « Cantor's Paradise Regained: Constructive Mathematics from Brouwer to Kolmogorov to Gelfond », in : *Logic Programming. Knowledge Representation, and Nonmonotonic Reasoning*, New York, Springer, 2011..
- Kronecker, L., « On the concept of number », trad. Eng by W. Ewald, in : W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert : A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Volume II, Oxford, Clarendon Press, 1996.
- Loeb, I., « Questioning Constructive Reverse Mathematics », in : *Constructivist Foundations*, Vol. 7, N°2, 2012.
- Markov, A. A., « An approach to constructive mathematical logic », in : B. van Rootselaar & J.F. Staal (eds.), *Logic, methodology and philosophy of science III : proceedings of the third International congress for logic, methodology and philosophy of science, Amsterdam, 1967*, Amsterdam, North-Holland, 1968.





- Markov, A. A., « On the logic of constructive mathematics », Trad. Eng. in : *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 25, 1970.
- Martin-Löf, P., « Constructive mathematics and computer programming », in : L. Jonathan Cohen, J. Los, H. Pfeiffer and K-P. Podewski (Eds.), *Logic, Methodology and the Philosophy of Science VI*, coll. « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », Vol. 104, 1982.
- Martin-Löf, P., & Lozinski, Z. A., « Constructive Mathematics and Computer Programming (and Discussion) », in : *Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences*, Vol. 312, Issue 1522, 1984.
- Nagorny, M., « Andrei Markov and mathematical constructivism », in : *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, Vol. 134, Proceedings of the Ninth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, coll. « Studies in Logic and the Foundations of Mathematics », 1994.
- Richman, F., « Intuitionism as generalization », in : *Philosophia Mathematica*, N°5, 1990.
- Richman, F., « Interview with a constructive mathematician », in : *Modern Logic*, Vol. 6, N°3, 1996.
- Richman, F., « Existence Proofs », in : *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, Issue 4, 1999.
- Smorynski, C., « The Incompleteness Theorems », in : J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, New York, North Holland Publishing, 1977.
- Van Atten, M., Sundholm, G., Bourdeau, M. et Van Atten, V., « « Que les principes de la logique ne sont pas fiables » : Nouvelle traduction française annotée et commentée de l'article de 1908 de L. E. J. Brouwer », in : *Revue d'histoire des sciences*, Tome 67, Issue 2, 2014.

Sites web :

- Kolmogorow, A. N., *On the Interpretation of Intuitionistic Logic*, [en ligne], disponible sur : « <http://homepages.inf.ed.ac.uk/jmckinna/kolmogorov-1932.pdf> ».

